SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

Si $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$=1 es la solución analítica.

1. **(0.5P)** ¿Calcular usando la calculadora $y = \frac{x}{e^x-1}$ para $x = 10^{-15}$. ¿Cuál es el error porcentual cometido? ¿Por qué el error es grande?

   Solución

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

   x=1e-15
   format long
   y1=x/(exp(x)-1)
   y1=0.95
   (1-y1)/1 *100
   4.9%   debido al error de cancelación

2. **(0.5P)** Sustituya e^x usando la serie de Taylor en torno a $x = 0$ hasta el término cuadrático. Luego, calcule la forma aproximada de $\frac{x}{e^x-1}$.¿ Cuál es el error porcentual cometido?

   Solución

   $$y(x) \simeq \frac{x}{1 + x^2 + \frac{x^2}{2} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}.$$

   y2=1/(1+x/2) →1
   error= (1-y2)*100   %error percentual -→0%

3. Supongamos que estamos usando una representación de coma flotante de 13 bits donde hay 1 bit de signo y 4 bits de exponente.
   a) (0.5P) ¿La mantisa tiene cuántos bits?
   Rpta: 8 bits
   b) (0.5P) ¿Cuál es el mínimo exponente (L) y máximo exponente (U) con signo?
   BIAS=2^(4-1)-1=7
   L=0001-7 = -6
   U=1110-7 =7
   Rpta: L= -6; U=7

4. **(1P)** ¿Qué regla no es correcta en el método de Eliminación Gaussiana?. Seleccione solo una de las opciones:
   a) Multiplicar filas por una constante.
   b) Intercambiar filas.
   c) Sumar un número a una fila.
   d) Sumar a una fila el múltiplo de otra fila

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

(1P) Determinar el valor (V/F) de la siguiente proposición:

Si la matriz A de orden 4 admite una factorización LU por Crout entonces la traza de la matriz U es igual a 4.

a) Verdadero

b) Falso.

5. **(1P)** Sea la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

¿Es conveniente aplicar el método directo de la potencia? SIN REALIZAR ITERACIONES. Justifique su respuesta.

Respuesta:

Por ser una matriz triangular: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 3$

No es conveniente ya que el valor propio dominante debe ser único.

Es decir, debe cumplir: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$

6. **(1P)** Sea la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Es posible diagonalizar la matriz A? Justifique su respuesta.

Respuesta:

$\lambda_1 = 1$ es de multiplicidad 2.

$k_1 = 2$

Determinación del subespacio propio:

$$(A - \lambda_1)\, X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1 \neq 0$$

Siendo la dimensión:

$$d_1 = 1$$

Como no satisface $k_1 = d_1$, la matriz A no es diagonalizable.

7. **(1P)** Complete el código que falta con respecto al test de la dominancia estricta de la matriz A de orden n.

```
s=0;
for i=1:n
   j=……………………………………………;
   j(i)=…………………………………;
   if abs(A(i,i))>sum(abs(A(i,j)))
   s=s+1;
end
if n==s
   disp(-----------------------------------)
   end
end
```

Respuesta:

```
n=4;
s=0;
for i=1:n
    j=1:n;
    j(i)=[];
    if abs(A(i,i))>sum(abs(A(i,j)))
        s=s+1;
    end
    if n==s
        disp('A tiene diagonal estrictamente dominante')
    end
end
```

8. **(1P)** Sea el siguiente código de programación MATLAB, para analizar la convergencia del método de iteración de punto fijo para la ecuación ***x^3-3x-20=0:***

```
g=________________________

dg=diff(g)

x0=3   % Donde |g'(x)| alcanza su máximo valor.

m=abs(double(subs(dg,x0)))

if m<1

disp('Punto Fijo convergente')

else

disp('Punto Fijo divergente')

end

% m=________________________
```

Complete el programa de tal manera que la condición lógica sea verdadera y muestre el valor de m.

Respuesta(s)

```
((3*x+20)/x)^0.5          m=0.3574
(3*x+20)^(1/3)            m=0.1059
```

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE II

Problema 1

Para determinar las pérdidas en tuberías que transportan un flujo turbulento, en ocasiones se emplea la siguiente ecuación para determinar el factor de fricción de Darcy f en cálculos computacionales:

$$f = a + \frac{b}{R^c}$$

En donde:

$$a = 0.104\left(\frac{\in}{D}\right)^{0.225} + 0.532\left(\frac{\in}{D}\right)$$
$$b = 88\left(\frac{\in}{D}\right)^{0.44}$$
$$c = 1.62\left(\frac{\in}{D}\right)^{0.134}$$

Si $\frac{\in}{D}$ = 0.001, es la rugosidad relativa calculado con una precisión de 1% y el número de Reynolds $\boldsymbol{R}$ está entre 19944 y 19980. Estime:

a) **(1.5P)** El error absoluto esperado en las variables a, b y c.
b) **(1.5P)** La cota de error absoluto y relativo esperado en el cálculo del factor de fricción.
c) (**1.0P**) El intervalo probable donde se encontrará el valor exacto de f.

Solución:

a) Haciendo: $\frac{\in}{D} = eD$

$eD = 0.001$

$\varepsilon eD = 0.01 * 0.001 = 10^{-5}$

$R = 19968$

$\varepsilon R = 18$

$$\varepsilon a = \left|\frac{\partial a}{\partial eD}\right| \varepsilon eD = |5.4776| * 0.00001 = 5.4776 * 10^{-5}$$

$$\varepsilon b = \left|\frac{\partial b}{\partial eD}\right| \varepsilon eD = |1.8533 * 10^3| * 0.00001 = 0.0185$$

$$\varepsilon c = \left|\frac{\partial c}{\partial eD}\right| \varepsilon eD = |86.024| * 0.00001 = 8.6024 * 10^{-4}$$

b)

$\varepsilon f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \varepsilon a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \varepsilon b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \varepsilon c + \left|\frac{\partial f}{\partial Re}\right| \varepsilon R$

$\varepsilon f = |1|\varepsilon a + |0.0017|\varepsilon b + |-0.0017|\varepsilon c + |-2.3507 * 10^{-7}|\varepsilon R$

$\varepsilon f = 1.5343 * 10^{-4}$

c)

$a = 0.0225$

$b = 4.2119$

c=0.6420

$f = a + \frac{b}{R^c}$=0.02982164

$f - \varepsilon f \leq F \leq f + \varepsilon f$

$0.02966821 \leq F \leq 0.02997507$

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

Problema 2

En la Figura 1 se muestra tres tanques en serie en un proceso industrial. Los tanques tienen sección transversal unitaria y flujos de agua x,y, z respectivamente.

El flujo de entrada en el primer tanque es **u,** el flujo de salida que conecta los tanques 1 y 2 es **6 (x-y)**, el flujo de salida en los tanques 2 y 3 es **5 (y-z)**, y el flujo de salida del tanque 3 es de **5z**. Suponiendo que el sistema se encuentra en estado estacionario, se desea encontrar el nivel de agua **(x, y, z)** en cada tanque.
Considere **u=2 lt/min.**

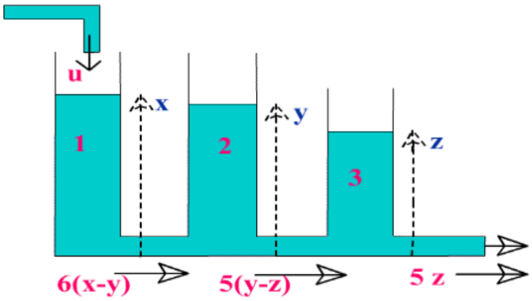


Figura 1 Sistema de tanques industriales

Nota: Considere la **ley de conservación de masa** en estado estacionario.

Se pide:

a) **(1P)** Modele el sistema lineal a resolver.
b) **(1P)** Verifique que el método de Jacobi converge. Justifique. **(NO REALICE ITERACIONES).**
c) **(1P)** Realice tres iteraciones usando el método de Jacobi.
d) **(1P)** ¿Cuál es el **error porcentual** en la tercera iteración?
Nota: Tome como valor exacto x=$A^{-1}b$. Use la norma infinita. $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

Solución:

a)

$$\left(\frac{dx}{dt} = u - 6x + 6y\right) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dt} = 6x - 11y + 5z\right) = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dt} = 5y - 10z\right) = 0$$

$$6x - 6y = 2$$
$$11y - 6x - 5z = 0$$
$$10z - 5y = 0$$

b) No tiene diagonal estrictamente dominante por lo que es necesario el cálculo del radio espectral para determinar si el método de Jacobi Converge.

```
A = 3×3                     b = 3×1
     6    -6     0                2
    -6    11    -5                0
     0    -5    10                0

Tj = 3×3
          0    1.0000         0
     0.5455         0    0.4545
          0    0.5000         0

rhoj = 0.8790
```

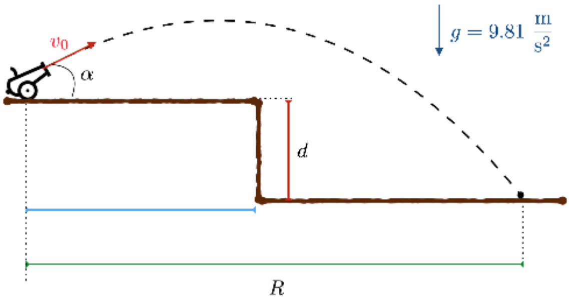
c) y d)

```
Tabla de iteraciones con el método de Jacobi

=============================================

it      x1        x2       x3

 0    0.0000   0.0000   0.0000
 1    0.3333   0.0000   0.0000
 2    0.3333   0.1818   0.0000
 3    0.5152   0.1818   0.0909

error en la tercera iteración=  54.545

sol = 3×1
      1.1333
      0.8000
      0.4000
```

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

Problema 3

En un experimento militar se ha lanzado un proyectil descrito por una trayectoria parabólica representada en la figura:



La siguiente función

$$R(\alpha) = \frac{v_0\cos(\alpha)\left(v_0\sin(\alpha)+\sqrt{\sin^2(\alpha)v_0^2+2gd}\right)}{g},$$

permite obtener el alcance R del proyectil. El alto mando de la fuerza militar desea determinar el ángulo de lanzamiento α (rad) que permita obtener un alcance de R=162.87 m.

Considere las condiciones iniciales: $g = 9.81\frac{m}{s^2}$; $\mathrm{d} = 100\ \mathrm{m.}$; $\mathrm{v}_0 = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a) **(1P)** Localice la raíz o raíces de la ecuación con intervalos de longitud 0.1. Seleccione el(los) intervalos que asegure la existencia de al menos una raíz según el **Teorema de Bolzano**.
   i. [0.2;0.3]
   ii. [0.3;0.4]
   iii. [0.4;0.5]

b) **(2P)** A partir del intervalo inicial obtenido en (a) aplique el método de la bisección para aproximar la raíz realizando 02 iteraciones e indique el error en cada iteración.

c) **(1P)** Halle el número de iteraciones necesarios teóricas para aproximar la raíz en el intervalo [0.2;0.5] con una tolerancia 10^{-5}.

Solución:

a)

$$f(\alpha) = \frac{v_0\cos(\alpha)\left(v_0\sin(\alpha)+\sqrt{\sin^2(\alpha)v_0^2+2gd}\right)}{g} - 162.87$$

α rad.	$f(\alpha)$
0.2	-11.0189
0.3	-4.9608
0.4	-0.8985
0.5	0.7487

Existe una raíz entre 0.4 y 0.5

b)

<u>Iteración 0</u>

Xi=0.4 f(0.4)=-0.8985
Xs=0.5 f(0.5)=0.7487
Xr=(0.4+0.5)/2=0.45 f(0.45)= 0.2515
eXr=(0.5-0.4)/2=0.05
f(0.4)*f(0.45)<0, la raíz está en el lado izquierdo del intervalo

<u>Iteración 1</u>

Xi=0.4 f(0.4)= -0.8985
Xs=0.45 f(0.45)= 0.2515
Xr=(0.4+0.45)/2=0.425 f(0.425)=-0.2448
eXr=(Xs-Xi)/2=0.025
f(0.425)*f(0.45)<0, la raíz está en el lado derecho del intervalo

<u>Iteración 2</u>

Xi=0.4 f(0.4)= -0.8985
Xs=0.45 f(0.45)= 0.2515
Xr=(0.4+0.45)/2=0.425 f(0.425)=-0.2448
eXr=(Xs-Xi)/2=0.025
f(0.425)*f(0.45)<0, la raíz está en el lado derecho del intervalo

i	Xi	Xr	Xs	f(Xi)	f(Xr)	f(Xs)	Err
0	0.4	0.5	0.45	-	+	+	0.025
1	0.4	0.45	0.425	-	+	-	0.125
2	0.425	0.45	0.4375	-	+	-	0.0625

La raiz aproximada es Xr=0.4375.

c)

$$\frac{|0.5-0.2|}{2^{N+1}} < TOL$$

$$\frac{0.3}{2^{N+1}} < 0.00001$$

$$N > 13.8727$$

Se requieren como mínimo 14 iteraciones para alcanzar la precisión deseada.